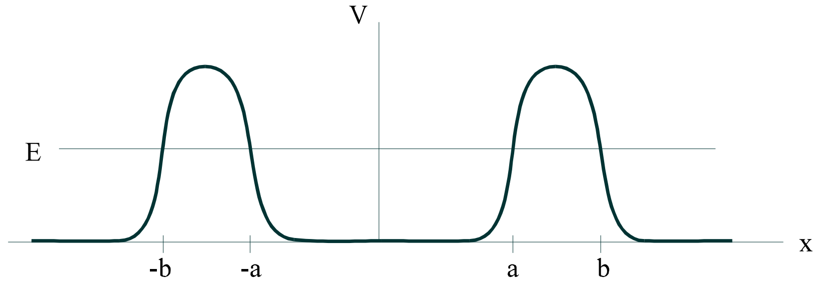
38.- Considerar un potencial formado por dos barreras simétricas como el que se muestra en la figura.



Con la notación:

$$\alpha = \int_{-a}^{a} \sqrt{2m\left(E - V(x)\right)/\hbar^2}dx \qquad \beta = \int_{a}^{b} \sqrt{2m\left(V(x) - E\right)/\hbar^2}dx$$

encontrar el coeficiente de transmisión del potencial en función de α y β, utilizando las fórmulas de conexión de la aproximación WKB. ¿Qué condición se debe satisfacer para que el coeficiente de transmisión sea máximo?

Solución: Para analizar este problema vamos a dividir el espacio en cinco regiones que son:

$$\mathrm{I}: x < -b \quad \mathrm{II}: -b < x < -a \quad \mathrm{III}: -a < x < a \quad \mathrm{IV}: a < x < b \quad \mathrm{V}: x > b$$

En cada una de estas regiones podemos utilizar las soluciones WKB. Lo único que tenemos que hacer es utilizar las fórmulas de conexión para ver cómo se relacionan las funciones de onda en cada una de las zonas. Vamos a considerar que incidimos con partículas de energía bien definida desde la izquierda, de modo que en la región V la función de onda será una onda que viaja hacia la derecha, que representará a las partículas que han conseguido atravesar las dos barreras. La solución en esta región la podemos escribir de la siguiente forma:

$$\psi_{\mathrm{V}}(x) = \frac{A}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(i \int_b^x k(x)dx - \frac{\pi}{4}\right), \qquad k(x) = \sqrt{2m\left(E - V(x)\right)/\hbar^2}$$

En el problema utilizaremos la notación:

$$k = k(x) = \sqrt{2m\left(E - V(x)\right)/\hbar^2} \qquad \rho = \rho(x) = \sqrt{2m\left(V(x) - E\right)/\hbar^2}$$

Con esta notación la función de onda anterior es:

$$\psi_{\mathrm{V}} = \frac{A}{\sqrt{k}} \cos\left(\int_b^x kdx - \frac{\pi}{4}\right) + i\frac{A}{\sqrt{k}} \sin\left(\int_b^x kdx - \frac{\pi}{4}\right)$$

Podemos escribir ya la función de onda en la zona IV utilizando las reglas de conexión:

$$\psi_{\mathrm{IV}} = \frac{A}{2\sqrt{\rho}} \exp\left(-\int_x^b \rho dx\right) - i\frac{A}{\sqrt{\rho}} \exp\left(\int_x^b \rho dx\right)$$

Para pasar a la zona III aplicando las reglas de conexión previamente tenemos que escribir la función de onda anterior de una forma más adecuada:

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{IV}} &= \frac{A}{2\sqrt{\rho}}\exp\left(-\int_x^a \rho dx - \int_a^b \rho dx\right) - i\frac{A}{\sqrt{\rho}}\exp\left(\int_x^a \rho dx + \int_a^b \rho dx\right) = \\ &= \frac{A}{2\sqrt{\rho}}e^{-\beta}\exp\left(\int_a^x \rho dx\right) - i\frac{A}{\sqrt{\rho}}e^{\beta}\exp\left(-\int_a^x \rho dx\right)\end{aligned}$$

Aplicamos ahora las reglas de conexión para obtener la función de onda en la región III:

$$\psi_{\mathrm{III}} = -\frac{A}{2\sqrt{k}}e^{-\beta}\sin\left(\int_x^a kdx - \frac{\pi}{4}\right) - 2i\frac{A}{\sqrt{k}}e^{\beta}\cos\left(\int_x^a kdx - \frac{\pi}{4}\right)$$

Tenemos que modificar de nuevo la función de onda para pasar a la región II:

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{III}} &= -\frac{A}{2\sqrt{k}}e^{-\beta}\sin\left(\int_x^{-a} kdx + \int_{-a}^a kdx - \frac{\pi}{4}\right) - 2i\frac{A}{\sqrt{k}}e^{\beta}\cos\left(\int_x^{-a} kdx + \int_{-a}^a kdx - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{A}{2\sqrt{k}}e^{-\beta}\sin\left(\int_{-a}^x kdx + \frac{\pi}{4} - \alpha\right) - 2i\frac{A}{\sqrt{k}}e^{\beta}\cos\left(\int_{-a}^x kdx + \frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \\ &= \frac{A}{2\sqrt{k}}e^{-\beta}\sin\left(\int_{-a}^x kdx - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2i\frac{A}{\sqrt{k}}e^{\beta}\cos\left(\int_{-a}^x kdx - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \\ &= \frac{A}{2\sqrt{k}}e^{-\beta}\sin\left(\int_{-a}^x kdx - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{A}{2\sqrt{k}}e^{-\beta}\cos\left(\int_{-a}^x kdx - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \\ &\quad -2i\frac{A}{\sqrt{k}}e^{\beta}\cos\left(\int_{-a}^x kdx - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2i\frac{A}{\sqrt{k}}e^{\beta}\sin\left(\int_{-a}^x kdx - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= \left(\frac{A}{2\sqrt{k}}e^{-\beta}\sin\alpha + 2i\frac{A}{\sqrt{k}}e^{\beta}\cos\alpha\right)\sin\left(\int_{-a}^x kdx - \frac{\pi}{4}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{A}{2\sqrt{k}}e^{-\beta}\cos\alpha - 2i\frac{A}{\sqrt{k}}e^{\beta}\sin\alpha\right)\cos\left(\int_{-a}^x kdx - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Podemos pasar ya a la región II:

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{II}} &= -\left(\frac{A}{2\sqrt{\rho}}e^{-\beta}\sin\alpha + 2i\frac{A}{\sqrt{\rho}}e^{\beta}\cos\alpha\right)\exp\left(\int_x^{-a} \rho dx\right) + \\ &\quad + \left(\frac{A}{4\sqrt{\rho}}e^{-\beta}\cos\alpha - i\frac{A}{\sqrt{\rho}}e^{\beta}\sin\alpha\right)\exp\left(-\int_x^{-a} \rho dx\right)\end{aligned}$$

Sólo nos queda pasar a la región I, para cual de nuevo tenemos que escribir la función de onda anterior de forma más adecuada:

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{II}} &= -\left(\frac{A}{2\sqrt{\rho}}e^{-\beta}\sin\alpha + 2i\frac{A}{\sqrt{\rho}}e^{\beta}\cos\alpha\right)\exp\left(\int_x^{-b} \rho dx + \int_{-b}^{-a} \rho dx\right) + \\ &\quad + \left(\frac{A}{4\sqrt{\rho}}e^{-\beta}\cos\alpha - i\frac{A}{\sqrt{\rho}}e^{\beta}\sin\alpha\right)\exp\left(-\int_x^{-b} \rho dx - \int_{-b}^{-a} \rho dx\right)\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\int_{-b}^{-a} \rho dx = \beta$ (por ser ρ una función par) queda:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathrm{II}} &= -\left(\frac{A}{2\sqrt{\rho}}\sin\alpha + 2i\frac{A}{\sqrt{\rho}}e^{2\beta}\cos\alpha\right)\exp\left(-\int_{-b}^{x}\rho dx\right) + \\ &+ \left(\frac{A}{4\sqrt{\rho}}e^{-2\beta}\cos\alpha - i\frac{A}{\sqrt{\rho}}\sin\alpha\right)\exp\left(\int_{-b}^{x}\rho dx\right) \end{aligned}$$

Por último la función de onda en la región I vale:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathrm{I}} &= -\left(\frac{A}{\sqrt{k}}\sin\alpha + 4i\frac{A}{\sqrt{k}}e^{2\beta}\cos\alpha\right)\cos\left(\int_{x}^{-b} kdx - \frac{\pi}{4}\right) - \\ &- \left(\frac{A}{4\sqrt{k}}e^{-2\beta}\cos\alpha - i\frac{A}{\sqrt{k}}\sin\alpha\right)\sin\left(\int_{x}^{-b} kdx - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\left(\frac{A}{\sqrt{k}}\sin\alpha + 4i\frac{A}{\sqrt{k}}e^{2\beta}\cos\alpha\right)\cos\left(\int_{-b}^{x} kdx + \frac{\pi}{4}\right) + \\ &+ \left(\frac{A}{4\sqrt{k}}e^{-2\beta}\cos\alpha - i\frac{A}{\sqrt{k}}\sin\alpha\right)\sin\left(\int_{-b}^{x} kdx + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Lo que tenemos que hacer ahora es escribir la función de onda anterior como una superposición de una onda que viaja hacia la derecha y otra que viaja hacia la izquierda para poder identificar la onda incidente.

$$\begin{aligned} \psi_{\mathrm{I}} &= -\left(\frac{A}{\sqrt{k}}\sin\alpha + 4i\frac{A}{\sqrt{k}}e^{2\beta}\cos\alpha\right)\frac{e^{i\int_{-b}^{x} kdx}e^{i\pi/4} + e^{-i\int_{-b}^{x} kdx}e^{-i\pi/4}}{2} + \\ &+ \left(\frac{A}{4\sqrt{k}}e^{-2\beta}\cos\alpha - i\frac{A}{\sqrt{k}}\sin\alpha\right)\frac{e^{i\int_{-b}^{x} kdx}e^{i\pi/4} - e^{-i\int_{-b}^{x} kdx}e^{-i\pi/4}}{2i} \end{aligned}$$

o bien agrupando términos:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathrm{I}} &= \frac{A}{\sqrt{k}}\left(-\frac{1}{2}\sin\alpha - 2ie^{2\beta}\cos\alpha - i\frac{1}{8}e^{-2\beta}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right)e^{i\int_{-b}^{x} kdx}e^{i\pi/4} + \\ &+ \frac{A}{\sqrt{k}}\left(-\frac{1}{2}\sin\alpha - 2ie^{2\beta}\cos\alpha + i\frac{1}{8}e^{-2\beta}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right)e^{-i\int_{-b}^{x} kdx}e^{-i\pi/4} \end{aligned}$$

El primero de los dos términos (una vez incluida la dependencia temporal correspondiente a una solución estacionaria) es la onda incidente, de modo que:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{incidente}} &= -\frac{A}{\sqrt{k}}\left(\sin\alpha + i\left(2e^{2\beta} + \frac{1}{8}e^{-2\beta}\right)\cos\alpha\right)e^{i\int_{-b}^{x} kdx}e^{i\pi/4} \\ \psi_{\text{transmitida}} &= \frac{A}{\sqrt{k}}e^{i\int_{b}^{x} kdx} \end{aligned}$$

Por tanto el coeficiente de transmisión vale:

$$T = \left[\sin^2\alpha + \left(2e^{2\beta} + \frac{1}{8}e^{-2\beta}\right)^2\cos^2\alpha\right]^{-1}$$

o bien transformando el seno cuadrado en coseno cuadrado:

$$\begin{aligned} T &= \left[1+\left(\left(2e^{2\beta}+\frac{1}{8}e^{-2\beta}\right)^2-1\right)\cos^2\alpha\right]^{-1} = \\ &= \left[1+\left(2e^{2\beta}-\frac{1}{8}e^{-2\beta}\right)^2\cos^2\alpha\right]^{-1} \end{aligned}$$

Este coeficiente de transmisión será máximo si:

$$\alpha = \int_{-a}^{a} \sqrt{2m\left(E-V(x)\right)/\hbar^2}dx = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

Este máximo se produce por las interferencias constructivas de las ondas que se reflejan en las paredes internas de las dos barreras. Se puede demostrar que un paquete de onda cuya energía verifica aproximadamente la condición anterior tarda un tiempo muy grande en atravesar el sistema de las dos barreras, ya que se produce una resonancia.