

### 3.2 Sistemas equilibrados sin neutro (sistema a tres hilos)

Podemos adoptar diversas soluciones:

- 1ª Con un solo vatímetro y disponiendo de dos resistencias idénticas a la de la resistencia interna de la parte voltimétrica del vatímetro, conectándolo, tal como indica la figura 8.7, para formar un neutro artificial para la medida.

Igual que en el caso anterior la medida del vatímetro se multiplicará por tres para obtener el consumo de las tres fases.

- 2ª Con tres vatímetros iguales, conectando cada uno en una fase y las salidas de las bobinas de tensión de los tres entre sí, para formar el neutro artificial de medida (figura 8.8).

La medida de los tres vatímetros será la misma (estando el sistema equilibrado) y con la suma de las tres medidas se obtendrá la potencia consumida por el sistema trifásico.

- 3ª Con dos vatímetros, conocido por método de los dos vatímetros o conexión Aron (figura 8.9).

La potencia activa total consumida será:

$$P = \bar{U}_{AN} \cdot \bar{I}_A + \bar{U}_{BN} \cdot \bar{I}_B + \bar{U}_{CN} \cdot \bar{I}_C$$

y teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C &= 0 \\ \bar{I}_C &= -(\bar{I}_A + \bar{I}_B) \end{aligned} \quad (1)$$

sustituyendo:

$$P = \bar{U}_{AN} \cdot \bar{I}_A + \bar{U}_{BN} \cdot \bar{I}_B + \bar{U}_{CN} \cdot (-\bar{I}_A - \bar{I}_B) = \bar{I}_A \cdot (\bar{U}_{AN} - \bar{U}_{CN}) + \bar{I}_B \cdot (\bar{U}_{BN} - \bar{U}_{CN})$$

y como:

$$\bar{U}_{AN} - \bar{U}_{CN} = \bar{U}_{AN} + \bar{U}_{NC} = \bar{U}_{AC} \quad \bar{U}_{BN} - \bar{U}_{CN} = \bar{U}_{BN} + \bar{U}_{NC} = \bar{U}_{BC}$$

tendremos que:

$$P = \bar{U}_{AC} \cdot \bar{I}_A + \bar{U}_{BC} \cdot \bar{I}_B$$

Si hubiéramos despejado de (1), en vez de  $\bar{I}_C$ , la intensidad  $\bar{I}_A$  o  $\bar{I}_B$ , obtendríamos, respectivamente:

$$\begin{aligned} P &= \bar{U}_{BA} \cdot \bar{I}_B + \bar{U}_{CA} \cdot \bar{I}_C \\ P &= \bar{U}_{AB} \cdot \bar{I}_A + \bar{U}_{CB} \cdot \bar{I}_C \end{aligned}$$

de donde sacamos la siguiente conclusión:

**Se eligen dos líneas cualesquiera para conectar los circuitos de intensidad de cada vatímetro, conectando la entrada de la bobina de tensión, a la línea donde va el circuito de intensidad, y la salida, a la fase que no se utiliza en los referidos circuitos de intensidad.**

Vamos a demostrar que este método, también, es válido cuando el receptor está conectado en triángulo (figura 8.10).

La potencia total consumida será la suma de las que se consumen en cada fase:

$$P = \bar{U}_{AB} \cdot \bar{I}_{AB} + \bar{U}_{BC} \cdot \bar{I}_{BC} + \bar{U}_{CA} \cdot \bar{I}_{CA}$$

y también se cumplirá que:

$$\begin{aligned} \bar{I}_A &= \bar{I}_{AB} - \bar{I}_{CA} \\ \bar{I}_B &= \bar{I}_{BC} - \bar{I}_{AB} \\ \bar{I}_C &= \bar{I}_{CA} - \bar{I}_{BC} \end{aligned}$$

y, de igual manera:

$$\bar{U}_{AB} + \bar{U}_{BC} + \bar{U}_{CA} = 0 \quad \bar{U}_{AB} = -\bar{U}_{BC} - \bar{U}_{CA} \quad (2)$$

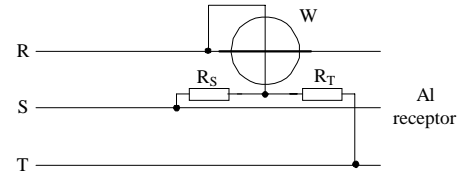


Fig. 8.7

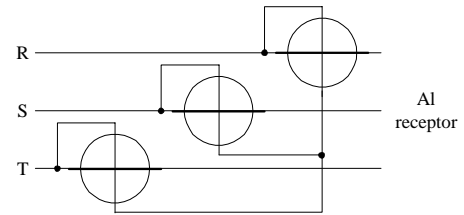


Fig. 8.8

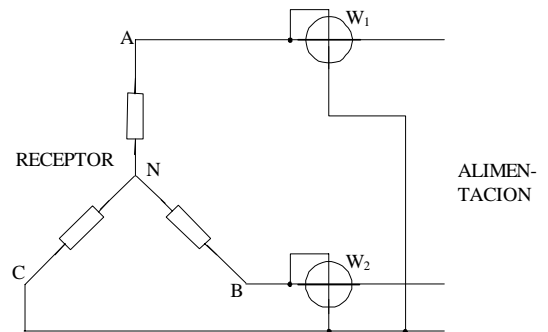


Fig. 8.9

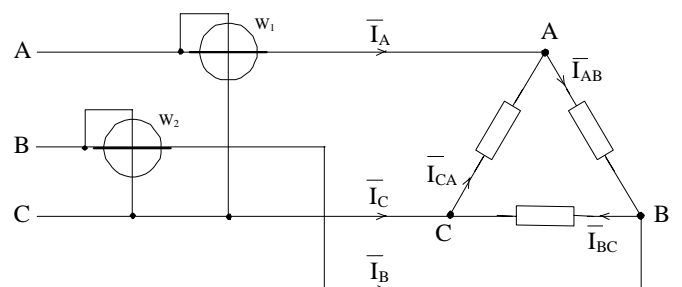


Fig. 8.10

sustituyendo esta última, tendremos:

$$P = \bar{I}_{AB}(-\bar{U}_{BC} - \bar{U}_{CA}) + \bar{U}_{BC}\bar{I}_{BC} + \bar{U}_{CA}\bar{I}_{CA} = -\bar{U}_{BC}\bar{I}_{AB} - \bar{U}_{CA}\bar{I}_{AB} + \bar{U}_{BC}\bar{I}_{BC} + \bar{U}_{CA}\bar{I}_{CA} = \\ = \bar{U}_{BC}(\bar{I}_{BC} - \bar{I}_{AB}) + \bar{U}_{CA}(\bar{I}_{CA} - \bar{I}_{AB}) = \bar{I}_B\bar{U}_{BC} + \bar{U}_{CA}(-\bar{I}_A) = \bar{I}_A\bar{U}_{AC} + \bar{I}_B\bar{U}_{BC}$$

como queríamos demostrar.

De igual forma, si sustituimos en (2), en lugar de  $\bar{U}_{AB}$ ,  $\bar{U}_{BC}$  o  $\bar{U}_{CA}$ , obtendríamos:

$$P = \bar{I}_B\bar{U}_{BA} + \bar{I}_C\bar{U}_{CA} \\ P = \bar{I}_A\bar{U}_{AB} + \bar{I}_C\bar{U}_{CB}$$

Hemos comprobado que, tanto si el receptor está conexionado en estrella o en triángulo, la medida que obtenemos en los vatímetros  $W_1$  y  $W_2$  es:

$$P_1 = I_A U_{AC} \cdot \cos(\bar{I}_A \leftrightarrow \bar{U}_{AC}) \quad \text{donde } (\bar{I}_A \leftrightarrow \bar{U}_{AC}) \text{ representa el ángulo entre la intensidad } \bar{I}_A \text{ y la tensión } \bar{U}_{AC}. \\ P_2 = I_B U_{BC} \cdot \cos(\bar{I}_B \leftrightarrow \bar{U}_{BC})$$

Si suponemos que tenemos un sistema trifásico equilibrado de secuencia directa o ABC y receptor inductivo, podemos situar fasorialmente las magnitudes indicadas para  $P_1$  y  $P_2$  (figura 8.11).

$$\bar{I}_A \leftrightarrow \bar{U}_{AC} = 30^\circ - \varphi \\ \bar{I}_B \leftrightarrow \bar{U}_{BC} = 30^\circ + \varphi$$

Si tenemos en cuenta que, modularmente,

$$|U_{AB}| = |U_{BC}| = |U_{CA}| = |U|$$

y que

$$|I_A| = |I_B| = |I_C| = |I|$$

siendo  $U$  e  $I$  los valores eficaces de la tensión e intensidad de línea:

$$P_1 = UI \cos(30 - \varphi) = UI \cos 30 \cos \varphi + UI \sin 30 \sin \varphi \\ P_2 = UI \cos(30 + \varphi) = UI \cos 30 \cos \varphi - UI \sin 30 \sin \varphi$$

de manera que:

$$P_1 + P_2 = 2UI \cos 30 \cos \varphi = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} UI \cos \varphi = \sqrt{3} UI \cos \varphi = P \\ P_1 - P_2 = 2UI \sin 30 \sin \varphi = 2 \frac{1}{2} UI \sin \varphi = UI \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

por lo que podemos expresar que:

$$P = P_1 + P_2 \\ Q = \sqrt{3}(P_1 - P_2)$$

y también:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{\sqrt{3}(P_1 - P_2)}{P_1 + P_2}$$

Casos particulares (ver tabla):

$$\varphi = 0 \quad P_1 = P_2 \\ \varphi > 0 \quad P_1 > P_2 \\ \varphi = 60^\circ \quad P_2 = 0 \\ \varphi > 60^\circ \quad P_2 < 0$$

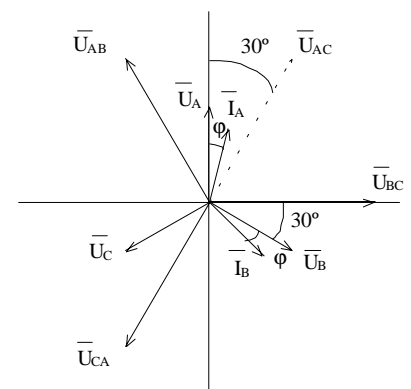


Fig. 8.11

	Carga inductiva	Carga capacitiva
	$W_1 = I_L \cdot V_L \cdot \cos(30 - \varphi)$	$W_1 = I_L \cdot V_L \cdot \cos(30 + \varphi)$
	$W_2 = I_L \cdot V_L \cdot \cos(30 + \varphi)$	$W_2 = I_L \cdot V_L \cdot \cos(30 - \varphi)$
$ \varphi  = 0$	$W_1 = W_2$	
$0 <  \varphi  < 60^\circ$	$W_1 > 0$	
	$W_2 > 0$	
$ \varphi  = 60^\circ$	$W_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot I_L \cdot V_L$	$W_1 = 0$
	$W_2 = 0$	$W_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot I_L \cdot V_L$
$60^\circ <  \varphi  \leq 90^\circ$	$W_1 > 0$	$W_1 < 0$
	$W_2 < 0$	$W_2 > 0$

Si tuviéramos un sistema trifásico de secuencia directa y receptor capacitivo, tendríamos la representación fasorial de la figura 8.12, y para los ángulos:

$$\bar{I}_A \leftrightarrow \bar{U}_{AC} = 30^\circ + \varphi$$

$$\bar{I}_B \leftrightarrow \bar{U}_{BC} = 30^\circ - \varphi$$

por lo que:

$$P_1 = UI \cos(30 + \varphi) = UI \cos 30 \cos \varphi - UI \sin 30 \sin \varphi$$

$$P_2 = UI \cos(30 - \varphi) = UI \cos 30 \cos \varphi + UI \sin 30 \sin \varphi$$

y obtendríamos:

$$P = P_1 + P_2$$

$$Q = \sqrt{3}(P_2 - P_1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{\sqrt{3}(P_2 - P_1)}{P_1 + P_2}$$

y los casos particulares:

$$\varphi = 0 \quad P_1 = P_2$$

$$\varphi > 0 \quad P_2 > P_1$$

$$\varphi = 60^\circ \quad P_1 = 0$$

$$\varphi > 60^\circ \quad P_1 < 0$$

Con secuencia inversa y receptor inductivo, la representación fasorial sería la de la figura 8.13 y tendríamos:

$$\bar{I}_A \leftrightarrow \bar{U}_{AC} = 30^\circ + \varphi$$

$$\bar{I}_B \leftrightarrow \bar{U}_{BC} = 30^\circ - \varphi$$

comportándose igual que en el caso de secuencia directa con receptor capacitivo.

El caso de secuencia inversa con receptor capacitivo es semejante al de secuencia directa con receptor inductivo.

De todo lo anterior, se deduce que para sistemas trifásicos equilibrados, sin neutro, es decir, a tres hilos, este método de los dos vatímetros nos permite obtener las potencias activa y reactiva, y también el valor del ángulo  $\varphi$ .

En los sistemas trifásicos equilibrados con o sin neutro, se puede medir la potencia reactiva por otro método diferente que responde al conexionado de la figura 8.14. También se podría aplicar este método a sistemas trifásicos desequilibrados con neutro, es decir, a cuatro hilos, siempre que se mantenga equilibrado el sistema de tensiones compuestas aplicadas.

Se demuestra identificando las medidas de cada vatímetro:

$$P_1 = I_A U_{BC} \cdot \cos(\bar{I}_A \leftrightarrow \bar{U}_{BC})$$

$$P_2 = I_B U_{CA} \cdot \cos(\bar{I}_B \leftrightarrow \bar{U}_{CA})$$

$$P_3 = I_C U_{AB} \cdot \cos(\bar{I}_C \leftrightarrow \bar{U}_{AB})$$

Suponiendo que el sistema trifásico sea de secuencia directa y el receptor inductivo, podemos representar fasorialmente las tensiones e intensidades según la figura 8.15, donde podemos identificar los ángulos cuyos cosenos medimos con los vatímetros.

$$\cos(\bar{I}_A \leftrightarrow \bar{U}_{BC}) = \cos(90 - \varphi_A) = \operatorname{sen} \varphi_A$$

$$\cos(\bar{I}_B \leftrightarrow \bar{U}_{CA}) = \cos(90 - \varphi_B) = \operatorname{sen} \varphi_B$$

$$\cos(\bar{I}_C \leftrightarrow \bar{U}_{AB}) = \cos(90 - \varphi_C) = \operatorname{sen} \varphi_C$$

Al ser las tensiones de línea o compuestas iguales en módulo:

$$|U_{AB}| = |U_{BC}| = |U_{CA}| = |U|$$

podemos expresar:

$$P_1 = UI_A \operatorname{sen} \varphi_A = \sqrt{3} Q_A$$

$$P_2 = UI_B \operatorname{sen} \varphi_B = \sqrt{3} Q_B$$

$$P_3 = UI_C \operatorname{sen} \varphi_C = \sqrt{3} Q_C$$

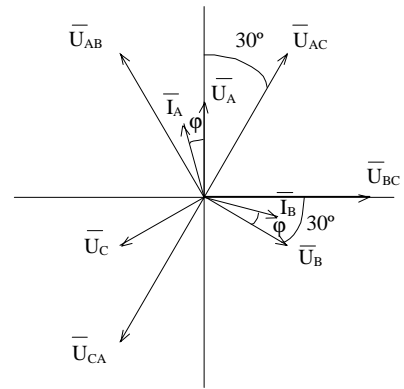


Fig. 8.12

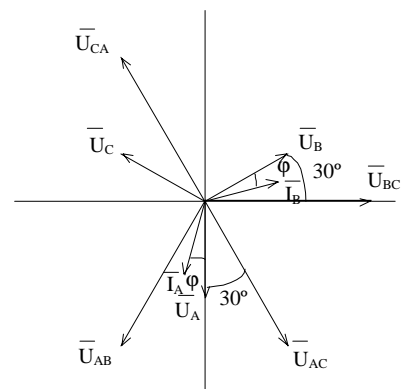


Fig. 8.13

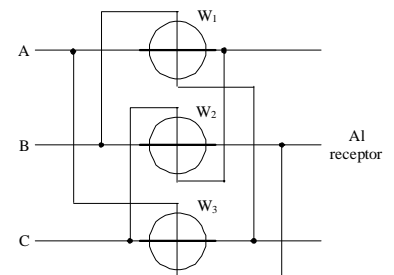


Fig. 8.14

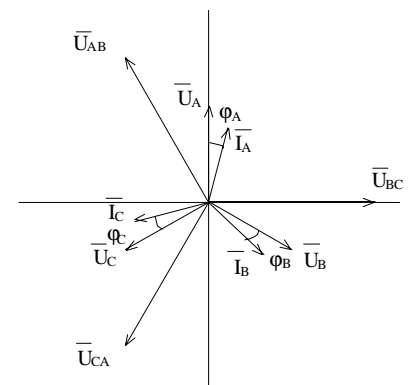


Fig. 8.15

y, en consecuencia:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = \frac{1}{\sqrt{3}}(P_1 + P_2 + P_3) \quad VAR$$

obteniendo valores positivos en las medidas, para receptores inductivos.

Si la secuencia es directa, pero el receptor capacitivo, en la representación fasorial de la figura 8.16, observamos para los ángulos:

$$\cos(\bar{I}_A \leftrightarrow \bar{U}_{BC}) = \cos(90 + \varphi_A) = -\text{sen } \varphi_A$$

$$\cos(\bar{I}_B \leftrightarrow \bar{U}_{CA}) = \cos(90 + \varphi_B) = -\text{sen } \varphi_B$$

$$\cos(\bar{I}_C \leftrightarrow \bar{U}_{AB}) = \cos(90 + \varphi_C) = -\text{sen } \varphi_C$$

Por lo tanto, obtendremos los mismos valores indicados anteriormente, pero con signo negativo, por lo que tendremos que invertir uno de los circuitos aplicados a cada vatímetro para poder realizar las medidas.

Si la secuencia fuera inversa con receptor inductivo, tendríamos la representación fasorial de la figura 8.17 en la que los ángulos serían:

$$\cos(\bar{I}_A \leftrightarrow \bar{U}_{BC}) = \cos(90 + \varphi_A) = -\text{sen } \varphi_A$$

$$\cos(\bar{I}_B \leftrightarrow \bar{U}_{CA}) = \cos(90 + \varphi_B) = -\text{sen } \varphi_B$$

$$\cos(\bar{I}_C \leftrightarrow \bar{U}_{AB}) = \cos(90 + \varphi_C) = -\text{sen } \varphi_C$$

El comportamiento sería el mismo que para secuencia directa y receptor capacitivo.

De la misma manera, se podría comprobar el caso de secuencia inversa con receptor capacitivo, cuyo comportamiento sería el mismo que para secuencia directa con receptor inductivo.

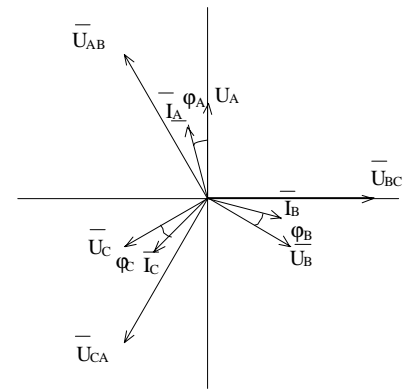


Fig. 8.16

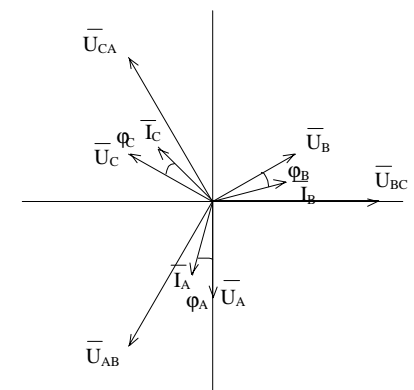


Fig. 8.17