Índice general

Capítulo 1

Introducción a las formas de Jordan

Este capítulo es *superfluo* en nuestro desarrollo. Queremos decir que para un *matemático profesional* e incluso para un alumno que esté *por encima de la media*, la *lectura lógica* continuaría en el siguiente capítulo.

Aquí se establece la existencia de una **matriz canónica normal de Jordan** para los endomorfismos triangularizables en espacios de dimensiones 2, 3, 4, pero esto mismo será demostrado en capítulos posteriores para una dimensión finita pero arbitraria n. Entonces, ¿por qué razón hemos decidido su redacción?

Ya habíamos advertido que el tema de las matrices de Jordan conlleva *dificultades* que obligan a elevar el nivel habitual de un curso de Álgebra y Geometría. Esto ya ha debido quedar de manifiesto en los capítulos previos, en los que aparecían conceptos como el de polinomio que se anula por un endomorfismo y descomposición primaria del espacio mediante uno de estos polinomios, cuestiones necesarias para llegar a las formas canónicas que perseguimos.

Pensamos que esta elevación de nivel puede *facilitarse* si aprendemos a colocar directamente los *primeros escalones.* Así, la *concreción* con la que trabajaremos en este capítulo preparará el terreno a la buena comprensión de la *abstracción* que aparecerá en los siguientes.

Pero, además, en algún caso (alumnos para los que la Matemática sea un instrumento de aplicación más que un objeto de estudio en sí) este capítulo (con algún añadido, relativo a autovalores imaginarios de un endomorfismo real, que vimos en la sección **??**) puede ser suficiente para *cerrar el tema.* En tal supuesto, podría eludirse la demostración general, limitándose el profesor a *indicar* la generalización de los *procesos operativos* que aquí estableceremos.

De cualquier manera, deberá ser el profesor concreto que dirija este curso (en función del nivel de sus alumnos y del tiempo disponible) quien tenga la última palabra a la hora de decidir una u otra opción. Por nuestra parte, nos limitamos al ofrecimiento de este *doble camino*.

1.1. El problema

Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita $n = 2, 3, 4$ sobre un cuerpo conmutativo $I\!\!K$. Sea f un endomorfismo triangularizable de $\mathbf{V}$. Esto equivale a decir que f tiene n autovalores en $I\!\!K$, con lo cual

$$\mathcal{C}(\xi) = (\xi - \lambda_1)^{s_1}(\xi - \lambda_2)^{s_2} \dots (\xi - \lambda_r)^{s_r},$$

y para el espacio $\mathbf{V}$ se tendrá una descomposición

$$\mathbf{V} = \ker(f - \lambda_1 I)^{s_1} \oplus \ker(f - \lambda_2 I)^{s_2} \oplus \ker(f - \lambda_r I)^{s_r},$$

de manera que

$$\dim(\ker(f - \lambda_i I)^{s_i}) = s_i$$

y el polinomio

$$(\xi - \lambda_i)^{s_i}$$

será el característico de la restricción de f a cada uno de los subespacios f-invariantes

$$\ker(f - \lambda_i I)^{s_i}.$$

Estableciendo una casuística en función de la multiplicidad de los autovalores y las dimensiones de los autoespacios, tratamos de obtener una base

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n\},$$

que nombraremos como **base de Jordan**, en la cual f se represente por una **matriz canónica normal de Jordan**, es decir, por una matriz triangular

$$J = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \epsilon_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \epsilon_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1} & \epsilon_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix},$$

donde cada α_i será un autovalor, y los términos ϵ_i pueden tomar sólo valores iguales a 0 o a 1, debiendo ser $\alpha_{i+1} = \alpha_i$ siempre que $\epsilon_i = 1$.

En particular, si todos los ϵ_i son nulos, se trata de endomorfismos diagonalizables. La *novedad*, pues, aparecerá en los casos no diagonalizables, es decir, en aquellos endomorfismos donde algún autoespacio tenga dimensión inferior al orden de multiplicidad de su respectivo autovalor.

1.2. Matrices de Jordan en dimensión 2

1. Dos autovalores simples.

   Si f admite dos autovalores simples α y β, se busca una base

   $$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2\},$$

   sin más que determinar dos vectores

   $$\begin{cases} \mathbf{z}_1 \in \ker(f - \alpha I), \mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_2 \in \ker(f - \beta I), \mathbf{z}_2 \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

   En ella el endomorfismo se representa por la **matriz diagonal**

   $$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

2. Un autovalor doble.

   Si f admite un autovalor doble α, tendremos

   $$\mathcal{C}(\xi) = (\xi - \alpha)^2 \Rightarrow \mathbf{V} = \ker(f - \alpha I)^2.$$

   La dimensión de $\ker(f - \alpha I)$ puede ser uno o dos.

   a) $\dim(\ker(f - \alpha I)) = 1$.

   Proposición 1.1 *Sea f un endomorfismo en un espacio $\mathbf{V}$ de dimensión 2 con un autovalor doble α para el cual*

   $$\dim(\ker(f - \alpha I)) = 1.$$

   Entonces:

   1) $\mathcal{M}(\xi) = (\xi - \alpha)^2 = \mathcal{C}(\xi)$.

   2) Dado cualquier vector $\mathbf{z}_2 \in \mathbf{V}$ tal que

   $$\mathbf{z}_2 \notin \ker(f - \alpha I),$$

   el vector

   $$\mathbf{z}_1 = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_2)$$

   es un autovector de α.

   3) El conjunto $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ es una base y en ella se cumple

   $$f(\mathbf{z}_1) = \alpha \mathbf{z}_1, f(\mathbf{z}_2) = \mathbf{z}_1 + \alpha \mathbf{z}_2.$$

Demostración:

1) Como $\dim(\ker(f-\alpha I))=1$, la primera potencia de $f-\alpha I$ que se anula es la segunda.
2) Puesto que $\ker(f-\alpha I)^2=\mathbf{V}$, se tiene

$$\mathbf{0}=(f-\alpha I)^2(\mathbf{z}_2)=(f-\alpha I)((f-\alpha I)(\mathbf{z}_2))=(f-\alpha I)(\mathbf{z}_1)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{z}_1\in\ker(f-\alpha I).$$

Por otra parte,

$$\mathbf{z}_2\notin\ker(f-\alpha I)\Rightarrow \mathbf{z}_1=(f-\alpha I)(\mathbf{z}_2)\neq\mathbf{0}.$$

3) Supongamos una relación

$$a_1\mathbf{z}_1+a_2\mathbf{z}_2=\mathbf{0}.$$

Aplicando $f-\alpha I$ a ambos miembros queda

$$a_2\mathbf{z}_1=\mathbf{0}\Rightarrow a_2=0,$$

porque $\mathbf{z}_1\neq\mathbf{0}$. Anulado a_2, la relación es

$$a_1\mathbf{z}_1=\mathbf{0}\Rightarrow a_1=0,$$

donde hemos vuelto a aplicar que $\mathbf{z}_1\neq\mathbf{0}$. Así, $\{\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2\}$ es una base de $\mathbf{V}$. Como $\mathbf{z}_1$ es un autovector, se tiene $f(\mathbf{z}_1)=\alpha\mathbf{z}_1$, mientras que de la fórmula usada para obtener $\mathbf{z}_1$ se sigue que $f(\mathbf{z}_2)=\mathbf{z}_1+\alpha\mathbf{z}_2$.

□

En resumen, hemos encontrado una base

$$\mathcal{Z}=\{\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2\},$$

cuyos elementos se determinan por las condiciones

$$\begin{cases}\mathbf{z}_2\in\mathbf{V},\mathbf{z}_2\notin\ker(f-\alpha I)\\ \mathbf{z}_1=(f-\alpha I)(\mathbf{z}_2)\end{cases}$$

En ella, de acuerdo con la proposición 1.1, f se representa por la **matriz de Jordan**

$$J=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}.$$

b) $\dim(\ker(f-\alpha I))=2$.
Ahora f es la homotecia de razón α, y en cualquier base

$$\mathcal{Z}=\{\mathbf{z}_1;\mathbf{z}_2\}$$

de $\mathbf{V}$, el endomorfismo se representa por la **matriz diagonal**

$$J=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}.$$

1.3. Matrices de Jordan en dimensión 3

1. Tres autovalores simples.

   Si f admite tres autovalores simples α, β y γ, se busca una base

   $$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3\},$$

   sin más que determinar tres vectores

   $$\begin{cases} \mathbf{z}_1 \in \ker(f - \alpha I), \mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_2 \in \ker(f - \beta I), \mathbf{z}_2 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_3 \in \ker(f - \gamma I), \mathbf{z}_3 \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

   En ella el endomorfismo se representa por la **matriz diagonal**

   $$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

2. Un autovalor simple y otro doble.

   Si f admite un autovalor simple α y otro doble β, su polinomio característico será

   $$\mathcal{C}(\xi) = (\xi - \alpha)(\xi - \beta)^2,$$

   y se tiene la descomposición primaria:

   $$\mathbf{V} = \ker(f - \alpha I) \oplus \ker(f - \beta I)^2.$$

   En el primer sumando directo se tiene una base tomando cualquier autovector $\mathbf{z}_1$ asociado al autovalor α. Para los vectores $\mathbf{x}$ del segundo se cumplirá

   $$(f - \beta I)^2(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

   pero la dimensión del autoespacio $\ker(f - \beta I)$ podrá ser uno o dos.

   a) $\dim(\ker(f - \beta I)) = 1$.

   La restricción de f al plano $\ker(f - \beta I)^2$, tendrá un autovalor doble con una recta de autovectores. Entonces, podemos aplicarle la proposición 1.1 para obtener una base $\{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$ del mismo. Uniendo las bases de ambos sumandos, se llega a una base

   $$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$$

   de $\mathbf{V}$, cuyos elementos se determinan por las condiciones

   $$\begin{cases} \mathbf{z}_1 \in \ker(f - \alpha I), \mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_3 \in \ker(f - \beta I)^2, \mathbf{z}_3 \notin \ker(f - \beta I) \\ \mathbf{z}_2 = (f - \beta I)(\mathbf{z}_3) \end{cases}$$

en la cual f se representa por la **matriz de Jordan**

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

b) $\dim(\ker(f - \beta I)) = 2$.
En este supuesto, la base $\{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$ del plano $\ker(f - \beta I)$ se construye con dos autovectores de β que sean linealmente independientes. Uniendo las bases de ambos sumandos, se llega a una base

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3\}$$

de $\mathbf{V}$, cuyos elementos se determinan por las condiciones

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1 \in \ker(f - \alpha I), \mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_3 \in \ker(f - \beta I), \mathbf{z}_3 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_2 \in \ker(f - \beta I), \text{ independiente con } \mathbf{z}_3 \end{cases}$$

en la cual f se representa por la **matriz diagonal**

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

3. Un autovalor triple.

Si f admite un autovalor triple α, tendremos

$$\mathcal{C}(\xi) = (\xi - \alpha)^3 \Rightarrow \mathbf{V} = \ker(f - \alpha I)^3.$$

Siempre existe una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ en la cual f se representa por una matriz triangular

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \alpha & a_{23} \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

El endomorfismo $f - \alpha I$ se representará por

$$A - \alpha I = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimensión de $\ker(f - \alpha I)$ puede ser uno, dos o tres.

a) $\dim(\ker f - \alpha I) = 1$.

Proposición 1.2 *Sea f un endomorfismo en un espacio $\mathbf{V}$ de dimensión 3 con un autovalor triple α para el cual*

$$\dim(\ker(f-\alpha I)) = 1.$$

Entonces:

1) $\mathcal{M}(\xi) = (\xi-\alpha)^3 = \mathcal{C}(\xi)$.

2) Dado cualquier vector $\mathbf{z}_3 \in \mathbf{V}$ tal que

$$\mathbf{z}_3 \notin \ker(f-\alpha I)^2,$$

si calculamos los vectores

$$\mathbf{z}_2 = (f-\alpha I)(\mathbf{z}_3),$$

$$\mathbf{z}_1 = (f-\alpha I)^2(\mathbf{z}_3) = (f-\alpha I)(\mathbf{z}_2).$$

se prueba que $\mathbf{z}_1$ es un autovector de α.

3) El conjunto $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$ es una base y en ella se cumple

$$f(\mathbf{z}_1) = \alpha\mathbf{z}_1, f(\mathbf{z}_2) = \mathbf{z}_1 + \alpha\mathbf{z}_2, f(\mathbf{z}_3) = \mathbf{z}_2 + \alpha\mathbf{z}_3.$$

Demostración:

1) Empezamos por observar que

$$\dim(\ker(f-\alpha I)) = 1 \Rightarrow \ \mathrm{rang}(A-\alpha I) = 2 \Rightarrow a_{12}a_{23} \neq 0.$$

Entonces, en

$$(A-\alpha I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{12}a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el elemento de la primera fila y tercera columna cumple

$$a_{12}a_{23} \neq 0 \Rightarrow \ \mathrm{rang}((f-\alpha I)^2) = 1 \Rightarrow \dim(\ker(f-\alpha I)^2) = 2.$$

Así, la primera potencia de $f-\alpha I$ que se anula es la tercera.

2) Puesto que $\ker(f-\alpha I)^3 = \mathbf{V}$, se tiene

$$\mathbf{0} = (f-\alpha I)^3(\mathbf{z}_3) = (f-\alpha I)((f-\alpha I)^2(\mathbf{z}_3)) = (f-\alpha I)(\mathbf{z}_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{z}_1 \in \ker(f-\alpha I)$$

Por otra parte,

$$\mathbf{z}_3 \notin \ker(f-\alpha I)^2 \Rightarrow \mathbf{z}_1 = (f-\alpha I)^2(\mathbf{z}_3) \neq \mathbf{0}.$$

3) Supongamos una relación

$$a_1\mathbf{z}_1 + a_2\mathbf{z}_2 + a_3\mathbf{z}_3 = \mathbf{0}$$

Aplicando $(f - \alpha I)^2$ a ambos miembros queda

$$a_3\mathbf{z}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow a_3 = 0$$

porque $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0}$. Anulado a_3, la relación es

$$a_1\mathbf{z}_1 + a_2\mathbf{z}_2 = \mathbf{0}.$$

Aplicando $f - \alpha I$ a ambos miembros queda

$$a_2\mathbf{z}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow a_2 = 0,$$

porque $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0}$. Anulados a_3 y a_2, la relación es

$$a_1\mathbf{z}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = 0,$$

donde hemos vuelto a aplicar que $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0}$. Así, $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$ es una base de $\mathbf{V}$. Como $\mathbf{z}_1$ es un autovector, se tiene $f(\mathbf{z}_1) = \alpha\mathbf{z}_1$, mientras que de las fórmulas usadas para obtener $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_2$ se sigue que $f(\mathbf{z}_2) = \mathbf{z}_1 + \alpha\mathbf{z}_2$ y $f(\mathbf{z}_3) = \mathbf{z}_2 + \alpha\mathbf{z}_3$.

□

En resumen, hemos encontrado una base

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\},$$

cuyos elementos se determinan por las condiciones

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{z}_3 \in \mathbf{V}, \mathbf{z}_3 \notin \ker(f - \alpha I)^2 \\ \mathbf{z}_2 = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_3) \\ \mathbf{z}_1 = (f - \alpha I)^2(\mathbf{z}_3) \end{array}\right.$$

En ella, de acuerdo con la proposición 1.2, f se representa por la **matriz de Jordan**

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

b) $\dim(\ker(f - \alpha I)) = 2$.

Proposición 1.3 *Sea f un endomorfismo en un espacio* $\mathbf{V}$ *de dimensión 3 con un autovalor triple α tal que*

$$\dim(\ker(f - \alpha I)) = 2.$$

Entonces:

1) $\mathcal{M}(\xi) = (\xi - \alpha)^2$.

2) Dado cualquier vector $\mathbf{z}_3 \in \mathbf{V}$ *tal que* $\mathbf{z}_3 \notin \ker(f - \alpha I)$*, el vector* $\mathbf{z}_2 = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_3)$ *es un autovector de* α*.*

3) Dada una base $\{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2\}$ *de* $\ker(f - \alpha I)$*, de la que* $\mathbf{z}_2$ *forme parte, el conjunto* $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$ *es una base de* $\mathbf{V}$*. En ella se cumple*

$$f(\mathbf{z}_1) = \alpha \mathbf{z}_1, f(\mathbf{z}_2) = \alpha \mathbf{z}_2, f(\mathbf{z}_3) = \mathbf{z}_2 + \alpha \mathbf{z}_3.$$

Demostración:

1) Ahora se tendrá $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \ker(f - \alpha I)$ de manera que

$$A - \alpha I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0},$$

porque su rango es 1, pero $(A - \alpha I)^2 = \mathbf{0}$, de manera que la primera potencia de $f - \alpha I$ que se ha anulado es la segunda.

2) Puesto que $\ker(f - \alpha I)^2 = \mathbf{V}$, se tiene

$$\mathbf{0} = (f - \alpha I)^2(\mathbf{z}_3) = (f - \alpha I)((f - \alpha I)(\mathbf{z}_3)) = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{z}_2 \in \ker(f - \alpha I)$$

Por otra parte,

$$\mathbf{z}_3 \notin \ker(f - \alpha I) \Rightarrow \mathbf{z}_2 = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_3) \neq \mathbf{0}$$

3) Supongamos una relación

$$a_1 \mathbf{z}_1 + a_2 \mathbf{z}_2 + a_3 \mathbf{z}_3 = \mathbf{0}$$

Aplicando $(f - \alpha I)$ a ambos miembros queda

$$a_3 \mathbf{z}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow a_3 = 0$$

porque $\mathbf{z}_2 \neq \mathbf{0}$. Anulado a_3, la relación es

$$a_1 \mathbf{z}_1 + a_2 \mathbf{z}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$$

pues $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ es una base de $\ker(f - \alpha I)$. Así, $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$ es una base de $\mathbf{V}$. Como $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_2$ son autovectores, será $f(\mathbf{z}_1) = \alpha \mathbf{z}_1, f(\mathbf{z}_2) = \alpha \mathbf{z}_2$. De la fórmula para definir $\mathbf{z}_2$ se sigue sin más que $f(\mathbf{z}_3) = \mathbf{z}_2 + \alpha \mathbf{z}_3$.

□

En resumen, hemos encontrado una base

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\},$$

cuyos elementos se determinan por las condiciones

$$\begin{cases} \mathbf{z}_3 \in \mathbf{V}, \mathbf{z}_3 \notin \ker(f - \alpha I) \\ \mathbf{z}_2 = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_3) \\ \mathbf{z}_1 \in \ker(f - \alpha I), \text{ independiente con } \mathbf{z}_2. \end{cases}$$

En ella, de acuerdo con la proposición 1.3, f se representa por la **matriz de Jordan**

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

c) $\dim(\ker(f - \alpha I)) = 3$.
Ahora f es la homotecia de razón α, y en cualquier base

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3\}$$

de $\mathbf{V}$, el endomorfismo se representa por la **matriz diagonal**

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1.4. Matrices de Jordan en dimensión 4

1. Cuatro autovalores simples.

   Si f admite cuatro autovalores simples α, β, γ y δ , se busca una base

   $$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3; \mathbf{z}_4\}$$

   sin más que determinar cuatro vectores

   $$\begin{cases} \mathbf{z}_1 \in \ker(f - \alpha I), \mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_2 \in \ker(f - \beta I), \mathbf{z}_2 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_3 \in \ker(f - \gamma I), \mathbf{z}_3 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_4 \in \ker(f - \delta I), \mathbf{z}_4 \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

   En ella el endomorfismo se representa por la **matriz diagonal**

   $$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

2. Dos autovalores simples y uno doble.

   Si f admite dos autovalores simples α y β, y otro doble γ, su polinomio característico será

   $$\mathcal{C}(\xi) = (\xi - \alpha)(\xi - \beta)(\xi - \gamma)^2,$$

y se tiene la descomposición primaria:

$$\mathbf{V} = \ker(f - \alpha I) \oplus \ker(f - \beta I) \oplus \ker(f - \gamma I)^2.$$

Los dos primeros sumandos directos son unidimensionales, lo que permite calcular un autovector $\mathbf{z}_1$ de α y otro $\mathbf{z}_2$ de β . Para los vectores $\mathbf{x}$ del tercero se cumplirá

$$(f - \gamma I)^2(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

pero el autoespacio $\ker(f - \gamma I)$, podrá tener dimensión uno o dos.

a) $\dim(\ker(f - \gamma I)) = 1$.
La restricción de f al plano $\ker(f - \gamma I)^2$, tendrá un autovalor doble con una recta de autovectores. Entonces, podemos obtener una base $\{\mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ del mismo aplicando el procedimiento de la proposición 1.1. Uniendo las bases de los tres sumandos directos de $\mathbf{V}$, se llega a una base

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$$

cuyos elementos se determinan por las condiciones

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1 \in \ker(f - \alpha I), \mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_2 \in \ker(f - \beta I), \mathbf{z}_2 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_4 \in \ker(f - \gamma I)^2, \mathbf{z}_4 \notin \ker(f - \gamma I) \\ \mathbf{z}_3 = (f - \gamma I)(\mathbf{z}_4) \end{cases}$$

en la cual f se representa por la **matriz de Jordan**

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

b) $\dim(\ker(f - \gamma I)) = 2$.
En este supuesto, la base $\{\mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ del plano $\ker(f - \gamma I)$ se construye con dos autovectores de γ que sean linealmente independientes. Uniendo las bases de los tres sumandos, se llega a una base

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3; \mathbf{z}_4\}$$

de $\mathbf{V}$, cuyos elementos se determinan por las condiciones

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1 \in \ker(f - \alpha I), \mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_2 \in \ker(f - \beta I), \mathbf{z}_2 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_3 \in \ker(f - \gamma I), \mathbf{z}_3 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_4 \in \ker(f - \gamma I), \text{ independiente con } \mathbf{z_3} \end{cases}$$

en la cual f se representa por la **matriz diagonal**

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

3. Un autovalor simple y otro triple.

   Si f admite un autovalor simple α y otro triple β, su polinomio característico será

   $$\mathcal{C}(\xi) = (\xi - \alpha)(\xi - \beta)^3,$$

   y se tiene la descomposición primaria:

   $$\mathbf{V} = \ker(f - \alpha I) \oplus \ker(f - \beta I)^3.$$

   En el primer sumando directo se puede tomar un autovector $\mathbf{z}_1$. Para los vectores $\mathbf{x}$ del segundo se cumplirá

   $$(f - \beta I)^3(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

   pero se presentarán tres alternativas según $\ker(f - \beta I)$ tenga dimensión uno, dos o tres.

   a) $\dim(\ker(f - \beta I)) = 1$.

   En este caso, el endomorfismo restricción de f al subespacio tridimensional $\ker(f - \beta I)^3$, tiene un autovalor triple con una recta de autovectores. Entonces, la proposición 1.2 permite obtener una base $\{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ de este espacio. Uniendo las de los dos sumandos directos, llegamos a una base

   $$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$$

   de $\mathbf{V}$, cuyos elementos se determinan por las condiciones

   $$\begin{cases} \mathbf{z}_1 \in \ker(f - \alpha I), \mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_4 \in \ker(f - \beta I)^3, \mathbf{z}_4 \notin \ker(f - \beta I)^2 \\ \mathbf{z}_3 = (f - \beta I)(\mathbf{z}_4) \\ \mathbf{z}_2 = (f - \beta I)^2(\mathbf{z}_4) \end{cases}$$

   en la cual f se representa por la **matriz de Jordan**

   $$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

b) $\dim(\ker(f-\beta I)) = 2$,
La restricción de f al espacio $\ker(f-\beta I)^3$, tendrá un autovalor triple con un plano de autovectores. Entonces, su base $\{\mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ se determina de acuerdo con la proposición 1.3. Uniéndola con la del otro sumando directo, se llega a una base

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$$

de $\mathbf{V}$, cuyos elementos se determinan por las condiciones

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1 \in \ker(f-\alpha I), \mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_4 \in \ker(f-\beta I)^2, \mathbf{z}_4 \notin \ker(f-\beta I) \\ \mathbf{z}_3 = (f-\beta I)(\mathbf{z}_4) \\ \mathbf{z}_2 \in \ker(f-\beta I), \text{ independiente con } \mathbf{z_3} \end{cases}$$

en la cual f se representa por la **matriz de Jordan**

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

c) $\dim(\ker(f-\beta I)) = 3$.
Para la base $\{\mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3; \mathbf{z}_4\}$ del segundo sumando bastará buscar tres autovectores de β que sean linealmente independientes. Uniendo las de los dos sumandos, se llega a una base

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3; \mathbf{z}_4\}$$

de $\mathbf{V}$, cuyos elementos se determinan por las condiciones

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1 \in \ker(f-\alpha I), \mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_4 \in \ker(f-\beta I), \mathbf{z}_4 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_3 \in \ker(f-\beta I), \text{ independiente con } \mathbf{z_4} \\ \mathbf{z}_2 \in \ker(f-\beta I), \text{ independiente con } \mathbf{z}_4 \text{ y } \mathbf{z_3} \end{cases}$$

en la cual f se representa por la **matriz diagonal**

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

4. Dos autovalores dobles.

Si f admite dos autovalores dobles α y β, se tendrá

$$\mathcal{C}(\xi) = (\xi-\alpha)^2(\xi-\beta)^2,$$

a la vez que la descomposición primaria:

$$\mathbf{V} = \ker(f - \alpha I)^2 \oplus \ker(f - \beta I)^2.$$

En cuanto a sus autoespacios, ambos pueden ser unidimensionales, uno tener dimensión dos y el otro uno, o ambos ser bidimensionales

a) $\dim(\ker(f - \alpha I)) = \dim(\ker(f - \beta I)) = 1$.
Cada una de las restricciones de f a los planos

$$\ker(f - \alpha I)^2,\ \ker(f - \beta I)^2,$$

posee un autovalor doble con una recta de autovectores. Aplicando la proposición 1.1, podemos construir una base $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ del primero y otra $\{\mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ del segundo. Uniéndolas, obtenemos una base

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$$

de $\mathbf{V}$, cuyos elementos se determinan por las condiciones

$$\begin{cases} \mathbf{z}_2 \in \ker(f - \alpha I)^2, \mathbf{z}_2 \notin \ker(f - \alpha I) \\ \mathbf{z}_1 = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_2) \\ \mathbf{z}_4 \in \ker(f - \beta I)^2, \mathbf{z}_4 \notin \ker(f - \beta I) \\ \mathbf{z}_3 = (f - \beta I)(\mathbf{z}_4) \end{cases}$$

en la cual f se representa por la **matriz de Jordan**

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

b) $\dim(\ker(f - \alpha I)) = 2, \dim(\ker(f - \beta I)) = 1$.
La base $\{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2\}$ del primer plano se forma con dos autovectores independientes de α, mientras que la $\{\mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ del segundo se obtiene por el método usado en la proposición 1.1. Uniéndolas, llegamos a la base

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$$

de $\mathbf{V}$, cuyos elementos se determinan por las condiciones

$$\begin{cases} \mathbf{z}_2 \in \ker(f - \alpha I), \mathbf{z}_2 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_1 \in \ker(f - \alpha I), \text{ independiente con } \mathbf{z_2} \\ \mathbf{z}_4 \in \ker(f - \beta I)^2, \mathbf{z}_4 \notin \ker(f - \beta I) \\ \mathbf{z}_3 = (f - \beta I)(\mathbf{z}_4) \end{cases}$$

en la cual f se representa por la **matriz de Jordan**

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

c) $\dim(\ker(f - \alpha I)) = \dim(\ker(f - \beta I)) = 2$.
Ambas bases se forman con parejas $\{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2\}$ y $\{\mathbf{z}_3; \mathbf{z}_4\}$ de autovectores independientes de α para una y de β para la otra. Al unirlas, se obtiene la base

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3; \mathbf{z}_4\}$$

de $\mathbf{V}$, cuyos elementos se determinan por las condiciones

$$\begin{cases} \mathbf{z}_2 \in \ker(f - \alpha I), \mathbf{z}_2 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_1 \in \ker(f - \alpha I), \text{ independiente con } \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_4 \in \ker(f - \beta I), \mathbf{z}_4 \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_3 \in \ker(f - \beta I), \text{ independiente con } \mathbf{z}_4 \end{cases}$$

el endomorfismo se representa por la **matriz diagonal**

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

5. Un autovalor cuádruple.

Si f admite un autovalor cuádruple α, tendremos

$$\mathcal{C}(\xi) = (\xi - \alpha)^4 \Rightarrow \mathbf{V} = \ker(f - \alpha I)^4.$$

Siempre existe una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ en la cual f se representa por una matriz triangular

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & \alpha & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & \alpha & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

El endomorfismo $f - \alpha I$ se representará por

$$A - \alpha I = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La dimensión de $\ker(f - \alpha I)$ puede ser uno, dos, tres o cuatro.

a) $\dim(\ker f - \alpha I) = 1$.

Proposición 1.4 *Sea f un endomorfismo en un espacio $\mathbf{V}$ de dimensión 4 con un autovalor cuádruple α para el cual*

$$\dim(\ker(f - \alpha I)) = 1.$$

Entonces:

1) $\mathcal{M}(\xi) = (\xi - \alpha)^4 = \mathcal{C}(\xi)$.

2) Dado cualquier vector $\mathbf{z}_4 \in \mathbf{V}$ *tal que*

$$\mathbf{z}_4 \notin \ker(f - \alpha I)^3,$$

si calculamos los vectores

$$\mathbf{z}_3 = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_4),$$

$$\mathbf{z}_2 = (f - \alpha I)^2(\mathbf{z}_4) = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_3),$$

$$\mathbf{z}_1 = (f - \alpha I)^3(\mathbf{z}_3) = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_2),$$

se prueba que $\mathbf{z}_1$ *es un autovector de* α*.*

3) El conjunto $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ *es una base y en ella se cumple*

$$f(\mathbf{z}_1) = \alpha\mathbf{z}_1, f(\mathbf{z}_2) = \mathbf{z}_1 + \alpha\mathbf{z}_2, f(\mathbf{z}_3) = \mathbf{z}_2 + \alpha\mathbf{z}_3, f(\mathbf{z}_4) = \mathbf{z}_3 + \alpha\mathbf{z}_4.$$

Demostración:

1) Empezamos por observar que

$$\dim(\ker(f - \alpha I)) = 1 \Rightarrow \ \mathrm{rang}(A - \alpha I) = 3 \Rightarrow a_{12}a_{23}a_{34} \neq 0.$$

Entonces, en

$$(A - \alpha I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{12}a_{23} & a_{12}a_{24} +_{34} a_{13}a \\ 0 & 0 & 0 & a_{23}a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la submatriz de las dos primeras filas y las dos últimas columnas tiene determinante

$$a_{12}(a_{23})^2 a_{34} \neq 0 \Rightarrow \ \mathrm{rang}((f - \alpha I)^2) = 2 \Rightarrow \dim(\ker(f - \alpha I)^2) = 2.$$

Haciendo un nuevo cálculo, tenemos

$$(A - \alpha I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{12}a_{23}a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{rang}((f - \alpha I)^3) = 1 \Rightarrow \dim(\ker(f - \alpha I)^3) = 3.$$

Así, la primera potencia de $f - \alpha I$ que se anula es la de exponente 4.

2) Puesto que $\ker(f-\alpha I)^4 = \mathbf{V}$, se tiene

$$\mathbf{0} = (f-\alpha I)^4(\mathbf{z}_4) = (f-\alpha I)((f-\alpha I)^3(\mathbf{z}_4)) = (f-\alpha I)(\mathbf{z}_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{z}_1 \in \ker(f-\alpha I).$$

Por otra parte,

$$\mathbf{z}_4 \notin \ker(f-\alpha I)^3 \Rightarrow \mathbf{z}_1 = (f-\alpha I)^3(\mathbf{z}_4) \neq \mathbf{0}.$$

3) Supongamos una relación

$$a_1\mathbf{z}_1 + a_2\mathbf{z}_2 + a_3\mathbf{z}_3 + a_4\mathbf{z}_4 = \mathbf{0}.$$

Aplicando $(f-\alpha I)^3$ a ambos miembros queda

$$a_4\mathbf{z}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow a_4 = 0,$$

porque $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0}$. Anulado a_4, la relación es

$$a_1\mathbf{z}_1 + a_2\mathbf{z}_2 + a_3\mathbf{z}_3 = \mathbf{0}.$$

Aplicando $(f-\alpha I)^2$ a ambos miembros queda

$$a_3\mathbf{z}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow a_3 = 0,$$

porque $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0}$. Anulados a_4 y a_3, la relación es

$$a_1\mathbf{z}_1 + a_2\mathbf{z}_2 = \mathbf{0}.$$

Aplicando $f-\alpha I$ a ambos miembros queda

$$a_2\mathbf{z}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow a_2 = 0,$$

porque $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0}$. Anulados a_4, a_3 y a_2, la relación es

$$a_1\mathbf{z}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = 0,$$

donde hemos vuelto a aplicar que $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0}$. Así, $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ es una base de $\mathbf{V}$. Se tiene $f(\mathbf{z}_1) = \alpha\mathbf{z}_1$ porque $\mathbf{z}_1$ es un autovector, mientras que de las fórmulas usadas para obtener $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ y $\mathbf{z}_3$ se sigue que

$$f(\mathbf{z}_2) = \mathbf{z}_1 + \alpha\mathbf{z}_2, f(\mathbf{z}_3) = \mathbf{z}_2 + \alpha\mathbf{z}_3, f(\mathbf{z}_4) = \mathbf{z}_3 + \alpha\mathbf{z}_4.$$

$\square$

En resumen, hemos encontrado una base

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\},$$

cuyos elementos se determinan por las condiciones

$$\begin{cases} \mathbf{z}_4 \in \mathbf{V}, \mathbf{z}_4 \notin \ker(f-\alpha I)^3 \\ \mathbf{z}_3 = (f-\alpha I)(\mathbf{z}_4) \\ \mathbf{z}_2 = (f-\alpha I)^2(\mathbf{z}_4) \\ \mathbf{z}_1 = (f-\alpha I)^3(\mathbf{z}_4) \end{cases}$$

En ella, de acuerdo con la proposición 1.4, f se representa por la **matriz de Jordan**

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

b) $\dim(\ker(f-\alpha I)) = 2$.
Podemos suponer que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \ker(f-\alpha I)$, por lo cual

$$A - \alpha I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A-\alpha I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{13}a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{23}a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A-\alpha I)^3 = \mathbf{0}.$$

Por hipótesis $A - \alpha I$ tiene rango 2 y, por ello, su tercera columna no puede ser nula, o sea, al menos uno de los números a_{13} y a_{23} es no nulo. En cambio, el rango de $(A-\alpha I)^2$, y, por tanto, la dimensión del subespacio $\ker(f-\alpha I)^2$ no están determinados. Por eso, hay que abrir dos opciones.

c) $\dim(\ker(f-\alpha I)^2) = 3$.

Proposición 1.5 *Sea f un endomorfismo en un espacio $\mathbf{V}$ de dimensión 4 con un autovalor cuádruple α para el cual*

$$\dim(\ker(f-\alpha I)) = 2, \dim(\ker(f-\alpha I)^2) = 3.$$

Entonces:

1) $\mathcal{M}(\xi) = (\xi - \alpha)^3$.

2) Dado cualquier vector $\mathbf{z}_4 \in \mathbf{V}$ tal que

$$\mathbf{z}_4 \notin \ker(f-\alpha I)^2,$$

si calculamos los vectores

$$\mathbf{z}_3 = (f-\alpha I)(\mathbf{z}_4),$$

$$\mathbf{z}_2 = (f-\alpha I)^2(\mathbf{z}_4) = (f-\alpha I)(\mathbf{z}_3),$$

se prueba que $\mathbf{z}_2$ es un autovector de α.

3) Siendo $\{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2\}$ *una base de* $\ker(f - \alpha I)$ *de la que* $\mathbf{z}_2$ *forme parte, el conjunto* $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ *es una base de* $\mathbf{V}$ *y en ella se cumple*

$$f(\mathbf{z}_1) = \alpha\mathbf{z}_1, f(\mathbf{z}_2) = \alpha\mathbf{z}_2, f(\mathbf{z}_3) = \mathbf{z}_2 + \alpha\mathbf{z}_3, f(\mathbf{z}_4) = \mathbf{z}_3 + \alpha\mathbf{z}_4.$$

Demostración:

1) Esta opción, que se corresponde con la condición $a_{34} \neq 0$, pues se ha señalado que uno de los números a_{13} o a_{23} es no nulo, pone de manifiesto que la primera potencia de $f - \alpha I$ que se anula es la tercera.
2) Puesto que $\ker(f - \alpha I)^3 = \mathbf{V}$, se tiene

$$\mathbf{0} = (f - \alpha I)^3(\mathbf{z}_4) = (f - \alpha I)((f - \alpha I)^2(\mathbf{z}_4)) = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{z}_2 \in \ker(f - \alpha I).$$

Por otra parte,

$$\mathbf{z}_4 \notin \ker(f - \alpha I)^2 \Rightarrow \mathbf{z}_2 = (f - \alpha I)^2(\mathbf{z}_4) \neq \mathbf{0}.$$

3) Supongamos una relación

$$a_1\mathbf{z}_1 + a_2\mathbf{z}_2 + a_3\mathbf{z}_3 + a_4\mathbf{z}_4 = \mathbf{0}.$$

Aplicando $(f - \alpha I)^2$ a ambos miembros queda

$$a_4\mathbf{z}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow a_4 = 0,$$

porque $\mathbf{z}_2 \neq \mathbf{0}$. Anulado a_4, la relación es

$$a_1\mathbf{z}_1 + a_2\mathbf{z}_2 + a_3\mathbf{z}_3 = \mathbf{0}.$$

Aplicando $f - \alpha I$ a ambos miembros queda

$$a_3\mathbf{z}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow a_3 = 0,$$

porque $\mathbf{z}_2 \neq \mathbf{0}$. Anulados a_4 y a_3, la relación es

$$a_1\mathbf{z}_1 + a_2\mathbf{z}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = 0,$$

pues $\{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2\}$ es una base de $\ker(f - \alpha I)$. Así, $\{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ es una base de $\mathbf{V}$. Se tiene $f(\mathbf{z}_1) = \alpha\mathbf{z}_1, f(\mathbf{z}_2) = \alpha\mathbf{z}_2$ por tratarse de autovectores, mientras que de las fórmulas usadas para obtener $\mathbf{z}_2$ y $\mathbf{z}_3$ se sigue que $f(\mathbf{z}_3) = \mathbf{z}_2 + \alpha\mathbf{z}_3, f(\mathbf{z}_4) = \mathbf{z}_3 + \alpha\mathbf{z}_4$.

□

En resumen, hemos llegado a una base

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\},$$

cuyos elementos se determinan por las condiciones

$$\begin{cases} \mathbf{z}_4 \in \mathbf{V}, \mathbf{z}_4 \notin \ker(f-\alpha I)^2 \\ \mathbf{z}_3 = (f-\alpha I)(\mathbf{z}_4) \\ \mathbf{z}_2 = (f-\alpha I)^2(\mathbf{z}_4) \\ \mathbf{z}_1 \in \ker(f-\alpha I), \text{ independiente con } \mathbf{z}_2 \end{cases}$$

En ella, de acuerdo con la proposición 1.5, f se representa por la **matriz de Jordan**

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

d) $\dim(\ker(f-\alpha I)^2) = 4$.

Proposición 1.6 *Sea f un endomorfismo en un espacio $\mathbf{V}$ de dimensión 4 con un autovalor cuádruple α tal que*

$$\dim(\ker(f-\alpha I)) = 2, \dim(\ker(f-\alpha I)^2) = 4.$$

Entonces:

1) $\mathcal{M}(\xi) = (\xi-\alpha)^2$.

2) Dados dos vectores independientes $\mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \in \mathbf{V}$ tales que

$$\ker(f-\alpha I) \oplus < \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 > = \mathbf{V},$$

los vectores

$$\mathbf{z}_3 = (f-\alpha I)(\mathbf{z}_4), \mathbf{z}_1 = (f-\alpha I)^2(\mathbf{z}_2),$$

son autovectores de α, independientes entre sí.

3) El conjunto $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ es una base de $\mathbf{V}$ y en ella se cumple

$$f(\mathbf{z}_1) = \alpha\mathbf{z}_1, f(\mathbf{z}_2) = \mathbf{z}_1 + \alpha\mathbf{z}_2, f(\mathbf{z}_3) = \alpha\mathbf{z}_3, f(\mathbf{z}_4) = \mathbf{z}_3 + \alpha\mathbf{z}_4.$$

Demostración:

1) En esta opción, que corresponde a la condición $a_{34} = 0$, es claro que la primera potencia de $f-\alpha I$ que se anula es la de exponente 2.

2) Puesto que $\ker(f-\alpha I)^2 = \mathbf{V}$, se tiene

$$\mathbf{0} = (f-\alpha I)^2(\mathbf{z}_4) = (f-\alpha I)((f-\alpha I)(\mathbf{z}_4)) = (f-\alpha I)(\mathbf{z}_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{z}_3 \in \ker(f-\alpha I),$$

$$\mathbf{z}_4 \notin \ker(f-\alpha I) \Rightarrow \mathbf{z}_3 = (f-\alpha I)(\mathbf{z}_4) \neq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{0} = (f-\alpha I)^2(\mathbf{z}_2) = (f-\alpha I)((f-\alpha I)(\mathbf{z}_1)) = (f-\alpha I)(\mathbf{z}_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{z}_1 \in \ker(f - \alpha I),$$
$$\mathbf{z}_2 \notin \ker(f - \alpha I) \Rightarrow \mathbf{z}_1 = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_2) \neq \mathbf{0},$$

luego, efectivamente, $\mathbf{z}_3$ y $\mathbf{z}_1$ son autovectores. Una relación como la

$$a_1\mathbf{z}_1 + a_3\mathbf{z}_3 = \mathbf{0},$$

se puede reescribir en la forma

$$(f - \alpha I)(a_1\mathbf{z}_2 + a_3\mathbf{z}_4) = \mathbf{0} \Rightarrow a_1\mathbf{z}_2 + a_3\mathbf{z}_4 \in \ker(f - \alpha I).$$

Este vector también pertenece al subespacio $< \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4 >$, complementario del autoespacio, luego debe ser

$$a_1\mathbf{z}_2 + a_3\mathbf{z}_4 = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = a_3 = 0,$$

pues $\mathbf{z}_2$ y $\mathbf{z}_4$ son independientes. Esto prueba que también $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_3$ lo son.

3) Supongamos una relación

$$a_1\mathbf{z}_1 + a_2\mathbf{z}_2 + a_3\mathbf{z}_3 + a_4\mathbf{z}_4 = \mathbf{0}.$$

Aplicando $(f - \alpha I)$ a ambos miembros queda

$$a_2\mathbf{z}_1 + a_4\mathbf{z}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow a_2 = a_4 = 0,$$

porque $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_3$ son independientes. Anulados a_4 y a_2, la relación es

$$a_1\mathbf{z}_1 + a_3\mathbf{z}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = a_3 = 0,$$

por igual razón. Así, $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ es base de $\mathbf{V}$. Por ser autovectores, se tiene $f(\mathbf{z}_1) = \alpha\mathbf{z}_1, f(\mathbf{z}_3) = \alpha\mathbf{z}_2$, mientras que de las fórmulas que definen a $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_3$ se sigue que $f(\mathbf{z}_2) = \mathbf{z}_1 + \alpha\mathbf{z}_2, f(\mathbf{z}_4) = \mathbf{z}_3 + \alpha\mathbf{z}_4$.

□

En resumen, se ha construido una base

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\},$$

cuyos elementos se determinan por las condiciones

$$\begin{cases} \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \in \mathbf{V}, \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \notin \ker(f - \alpha I) \\ \ker(f - \alpha I) \oplus < \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 > = \mathbf{V} \\ \mathbf{z}_3 = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_4) \\ \mathbf{z}_1 = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_2) \end{cases}$$

En ella, de acuerdo con la proposición 1.6, f se representa por la **matriz de Jordan**

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

e) $\dim(\ker(f - \alpha I)) = 3$.

Proposición 1.7 *Sea f un endomorfismo en un espacio $\mathbf{V}$ de dimensión 4 con un autovalor cuádruple α tal que*

$$\dim(\ker(f - \alpha I)) = 3.$$

Entonces:

1) $\mathcal{M}(\xi) = (\xi - \alpha)^2$.

2) Dado cualquier vector $\mathbf{z}_4 \in \mathbf{V}$ tal que

$$\mathbf{z}_4 \notin \ker(f - \alpha I),$$

el vector

$$\mathbf{z}_3 = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_4)$$

es un autovector de α.

3) Dada una base $\{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3\}$ de $\ker(f - \alpha I)$, de la que $\mathbf{z}_3$ forme parte, el conjunto $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ es una base de $\mathbf{V}$. En ella se cumple

$$f(\mathbf{z}_1) = \alpha\mathbf{z}_1, f(\mathbf{z}_2) = \alpha\mathbf{z}_2, f(\mathbf{z}_3) = \alpha\mathbf{z}_3, f(\mathbf{z}_4) = \mathbf{z}_3 + \alpha\mathbf{z}_4.$$

Demostración:

1) Ahora se tendrá $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \ker(f - \alpha I)$ de manera que

$$A - \alpha I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0},$$

porque su rango es 1, pero $(A - \alpha I)^2 = \mathbf{0}$, de manera que la primera potencia de $f - \alpha I$ que se ha anulado es la de exponente 2.

2) Puesto que $\ker(f - \alpha I)^2 = \mathbf{V}$, se tiene

$$\mathbf{0} = (f - \alpha I)^2(\mathbf{z}_4) = (f - \alpha I)((f - \alpha I)(\mathbf{z}_4)) = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{z}_3 \in \ker(f - \alpha I).$$

Por otra parte,

$$\mathbf{z}_4 \notin \ker(f - \alpha I) \Rightarrow \mathbf{z}_3 = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_4) \neq \mathbf{0},$$

3) Supongamos una relación

$$a_1\mathbf{z}_1 + a_2\mathbf{z}_2 + a_3\mathbf{z}_3 + a_4\mathbf{z}_4 = \mathbf{0}.$$

Aplicando $(f - \alpha I)$ a ambos miembros queda

$$a_4\mathbf{z}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow a_4 = 0,$$

porque $\mathbf{z}_3 \neq \mathbf{0}$. Anulado a_4, la relación es

$$a_1\mathbf{z}_1 + a_2\mathbf{z}_2 + a_3\mathbf{z}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

pues $\{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3\}$ es una base de $\ker(f - \alpha I)$. Así, $\{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ es una base de $\mathbf{V}$. Como los tres primeros son autovectores, será $f(\mathbf{z}_1) = \alpha\mathbf{z}_1, f(\mathbf{z}_2) = \alpha\mathbf{z}_2, f(\mathbf{z}_3) = \alpha\mathbf{z}_3$. De la fórmula para definir $\mathbf{z}_3$ se sigue sin más que $f(\mathbf{z}_4) = \mathbf{z}_3 + \alpha\mathbf{z}_4$.

$\square$

En resumen, hemos encontrado una base

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; , \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\},$$

cuyos elementos se determinan por las condiciones

$$\begin{cases} \mathbf{z}_4 \in \mathbf{V}, \mathbf{z}_4 \notin \ker(f - \alpha I) \\ \mathbf{z}_3 = (f - \alpha I)(\mathbf{z}_4) \\ \mathbf{z}_2 \in \ker(f - \alpha I), \text{ independiente con } \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_1 \in \ker(f - \alpha I), \text{ independiente con } \mathbf{z}_3 \text{ y } \mathbf{z}_2 \end{cases}$$

En ella, de acuerdo con la proposición 1.7, f se representa por la **matriz de Jordan**

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

f) $\dim(\ker(f - \alpha I)) = 4$.
Ahora f es la homotecia de razón α, y en cualquier base

$$\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1; \mathbf{z}_2; \mathbf{z}_3; \mathbf{z}_4\}$$

de $\mathbf{V}$, el endomorfismo se representa por la **matriz diagonal**

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1.5. Comentarios finales

Una vez conseguido el objetivo planteado para este capítulo, bueno será insertar una serie de comentarios:

Recuento de casos posibles por dimensión:
Repasando lo hecho en cada una de las dimensiones $n = 2, 3, 4$ resultan 23 formas diferentes de Jordan para endomorfismos triangularizables.

Cabe pensar en algún tipo de *efecto expansivo* al subir de dimensión y de hecho así ocurre.

Los métodos son contructivos:
Aseguramos esto en el sentido de que, para cada una de las posibles formas de Jordan en cada una de las dimensiones tratadas, no solamente se ha indicado el tipo de matriz canónica que se consigue, sino que se ha señalado cómo obtener una base en la que el endomorfismo en cuestión se representa por tal matriz. En muchas de las aplicaciones, el conocimiento de esta *base de Jordan* es imprescindible. Existen otras formas (más algebraicas que geométricas y que intencionadamente no hemos querido desarrollar) de llegar al conocimiento de la matriz de Jordan que eluden la construcción de tal base.

Importancia de la descomposición primaria:
El primer paso para llegar a la forma de Jordan ha sido la descomposición primaria asociada al polinomio característico. Reduce cada endomorfismo a sus restricciones a subespacios con un solo autovalor. Como la dimensión de estos subespacios (cuando haya al menos dos sumandos directos, o sea, dos autovalores diferentes) es menor que la de partida, nos podemos apoyar (y así lo hemos hecho) en el conocimiento de las formas de Jordan en dimensión más pequeña que la que estemos tratando.

Endomorfismos con un solo autovalor:
Así, la novedad en cada dimensión está en los automorfismos con un solo autovalor. Si el lector repasa este capítulo, verá que en ellos es donde hemos precisado de algún tipo de teorema para demostrar la existencia de una matriz y una base de Jordan. Algunas de estas demostraciones son *calcadas* unas de otras. Por ejemplo, las proposiciones 1.1, 1.2 y 1.4, relativas al caso en que

$$\dim(\ker(f - \alpha I)) = 1,$$

son la misma, pero cada vez con un *escalón* más. Cabe pensar que haya un enunciado en dimensión arbitraria que las englobe y así se presentará en el próximo capítulo. Otro tanto ocurre con los enunciados 1.3 y 1.7, en los que

$$\dim(\ker(f - \alpha I)) = n - 1.$$

Y, por supuesto, con los casos *triviales*, en los que no hemos ni planteado teorema alguno, donde

$$\dim(\ker(f - \alpha I)) = n,$$

correspondientes a las homotecias, cuya validez en cualquier dimensión es obvia.

Estas tres generalizaciones agotan las posibilidades en dimensión 3, pero el lector habrá observado cómo, intercalándose entre ellas, aparecen otras opciones al subir a la cuarta dimensión (proposiciones 1.5 y 1.6). Naturalmente, la cuestión se *complica* en dimensiones mayores y el *efecto expansivo* de que hablábamos antes es manifiesto.

Los autoespacios no determinan la forma de Jordan:
Parece que el conocimiento de las dimensiones de los diversos autoespacios determina de manera única la forma de Jordan. Así ocurre en un plano y en un espacio ordinario. Y en un espacio tetradimensional, salvo un caso (aquel en el que hay un solo autovalor y la dimensión de su autoespacio es 2), aparecen dos posibles matrices de Jordan y el dilucidar de cuál se trata depende del valor de

$$\dim(\ker(f - \alpha I)^2).$$

El lector debe creernos si le aseguramos que esta única *singularidad* que se aprecia al limitarnos a dimensiones menores o iguales que 4 desaparece al *elevarnos* dimensionalmente hablando. No sólo no va a ser excepción, sino que la presencia de casos similares se convierte casi en *norma.* Casos habrá en que haya que recurrir a la dimensión de $\ker(f - \alpha I)^3$ y de otras potencias superiores.

Construcción de la base de Jordan:
Decíamos que nuestras demostraciones son constructivas. En ellas (limitándonos siempre a endomorfismos con un solo autovalor) hemos tenido que establecer las sucesivas dimensiones de

$$\ker(f - \alpha I),\ \ker(f - \alpha I)^2,\ \ker(f - \alpha I)^3, \ldots$$

hasta llegar a una coincidente con la dimensión total. Esto, además de para *detectar* la excepción que acabamos de comentar, lo hemos usado para la construcción en cada uno de los casos estudiados de la base de Jordan correspondiente. La *idea general* (que por ello será la que se use en los siguientes capítulos) ha sido comenzar por tomar vectores en el subespacio *más alto*, o sea, en el primer $\ker(f - \alpha I)^m$ que coincida con $\mathbf{V}$, que no estén en el escalón inmediato anterior $\ker(f - \alpha I)^{m-1}$. Con ellos, mediante sucesivas aplicaciones del endomorfismo $f - \alpha I$, vamos construyendo otros vectores de la base de Jordan hasta llegar a uno que resulta ser autovector, todo ello auxiliado, si es menester, de alguna técnica de *ampliación de bases.*

¿Vectores asociados?
Este proceso *de final a principio* o, mejor, *de iniciar la casa por el tejado*, es el verdaderamente *sistemático* y *generalizable* y, por tanto, el *bueno*, el *canónico.* Comentamos esto porque aún en bibliografía reciente (de autores españoles) encontramos alusiones a un llamado *método de vectores asociados* que parte de cuantos autovectores sea posible (es decir, de una cantidad de ellos igual a la dimensión del autoespacio e independientes entre sí) y luego se va completando hasta una base con unos *asociados* que hay que determinar como soluciones de sistemas del tipo

$$(f - \alpha I)(\mathbf{x}) = \mathbf{v},$$

donde $\mathbf{x}$ es el *asociado incógnita* y $\mathbf{v}$ es un autovector o bien otro asociado previamente construido. El método *funciona* en dimensión 2 y en algún caso de dimensión 3. Pero, en esta dimensión, cuando f tiene un autovalor triple con un plano de autovectores, ¿con qué *autovector dato* de los dos prefijados se calcula el único *asociado* que falta? Se tome el que se tome, lo más probable es que el sistema en cuestión sea incompatible y cuando no lo sea será porque se trata de que *la flauta del burro sonó por casualidad.* Se habla, entonces, de *casos de ambigüedad* y se resuelven (como no podía ser de otro modo) tomando un autovector genérico (o sea, una combinación lineal de los dos prefijados) como término independiente del sistema. Así, la *excepción* se *regulariza.* Lo malo de este proceder es que se convierte en algo *impracticable* al pasar a otras dimensiones, donde las susodichas *ambigüedades* van a aparecer por doquier. En Matemáticas, ya se sabe, lo que no sea *sistema* y *canon* queda reducido a la categoría de *pura anécdota.* Este *pretendido método* lo es.

1.6. Complementos y ejercicios

1. En nuestro desarrollo teórico hemos encontrado 23 formas diferentes de Jordan para endomorfismos triangularizables en las dimensiones 2, 3, 4: tres en dimensión 2, seis en dimensión 3 y catorce en dimensión 4. Si excluimos los casos diagonalizables (dos en dimensión 2, tres en dimensión 3 y cinco en dimensión 4), quedan trece formas de Jordan propiamente dichas (es decir, donde J no es diagonal). A continuación se dan cuatro ejemplos de operadores f para cada uno de estos trece casos. Se supone que los espacios son cartesianos reales y que las matrices representan a f en la base canónica del espacio respectivo.

   Se pide, naturalmente, obtener la matriz J de Jordan, la base $\mathcal{Z}$ en que se alcanza y las matrices P y P^{-1} de los cambios de base.

   1) $\begin{pmatrix} 23 & -108 \\ 3 & -13 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -10 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   3) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

   5) $\begin{pmatrix} 10 & -17 & 15 & -18 \\ 4 & -8 & 10 & -12 \\ 14 & -31 & 30 & -33 \\ 10 & -21 & 18 & -19 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

   7) $\begin{pmatrix} -16 & -17 & 87 & -108 \\ 8 & 9 & -42 & 54 \\ -3 & -3 & 16 & -18 \\ -1 & -1 & 6 & -8 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} -19 & 52 & -38 & 49 \\ 14 & -29 & 25 & -32 \\ 44 & -92 & 79 & -98 \\ 12 & -20 & 20 & -23 \end{pmatrix}$

$$9)\ \begin{pmatrix} 12 & -15 & 15 & -18 \\ 12 & -21 & 21 & -27 \\ 18 & -30 & 33 & -36 \\ 6 & -6 & 9 & -6 \end{pmatrix} \qquad 10)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$11)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad 12)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$13)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 14)\ \begin{pmatrix} 19 & 9 \\ -4 & 31 \end{pmatrix}$$

$$15)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad 16)\ \begin{pmatrix} 9 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$17)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad 18)\ \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -5 & -7 & 0 \\ 10 & 11 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad 20)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$21)\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & -9 & 7 \\ 9 & 10 & -19 & -2 \\ 4 & 5 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad 22)\ \begin{pmatrix} 8 & -18 & 17 & -21 \\ 8 & -18 & 14 & -18 \\ 20 & -36 & 32 & -42 \\ 12 & -20 & 20 & -26 \end{pmatrix}$$

$$23)\ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 24\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$25)\ \begin{pmatrix} -4 & -3 & 15 & 6 \\ -3 & 2 & 6 & 3 \\ -3 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad 26)\ \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

27) $\begin{pmatrix} -10 & -7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ 28 $\begin{pmatrix} -8 & -9 & 14 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

29) $\begin{pmatrix} 11 & 11 & -21 \\ 7 & 7 & -15 \\ 9 & 9 & -18 \end{pmatrix}$ 30) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

31) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 32) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

33) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 34) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

35) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 36) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

37) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 38) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

39) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ 40) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

41) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ 42) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

43) $\begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 44) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

45) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 46) $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -4 & -12 \\ 5 & -2 & -4 & -6 \\ 4 & -3 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

47) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 48) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

49) $\begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ 50) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

51) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 52) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$