Resumen sobre mecánica analítica

Ecuaciones de Lagrange.

Supongamos una partícula, cuyo movimiento se puede describir mediante una sóla coordenada x, de modo que en el instante t la posición de la partícula viene dada por la función $x(t)$. Si la partícula parte del punto x_i en $t = 0$ y en el instante T se encuentra en la posición x_f, la trayectoria real $x(t)$ que realiza la partícula verifica que la integral de acción es extrema (máxima o mínima), donde la integral de acción viene dada por:

$$S = \int_0^T \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) dt$$

donde $\mathcal{L}$ es la función lagrangiana. En el caso en que el potencial bajo el que se mueve la partícula no dependa de la velocidad la lagrangiana viene dada por la función $\mathcal{L} = T - V$, donde T es la energía cinética y V la potencial. Por tanto, la trayectoria de la partícula se obtiene de la ecuación $\delta S = 0$, donde la variación de la acción debe ser compatible con las condiciones inicial y final. Vamos a obtener la variación de la acción:

$$\delta S = \int_0^T \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt$$

donde δx es cero en los instantes inicial y final. Interesa escribir la ecuación anterior de modo que en todos los términos aparezca δx en lugar de $\delta \dot{x}$, para ello, utilizaremos la siguiente igualdad:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta x \right) = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \delta x + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}$$

de modo que la ecuación anterior queda de la forma:

$$\delta S = \int_0^T \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \delta x + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \right] dt$$

el último término se puede integrar directamente y resulta ser nulo, debido a que δx es nulo en los instantes inicial y final. Por último, la condición $\delta S = 0$ queda de la forma:

$$\delta S = \int_0^T \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \right] \delta x dt = 0$$

Si queremos que δS sea cero para una variación δx arbitraria se debe verificar que el término que hay entre corchetes sea nulo, y llegamos así a la ecuación de Lagrange, que es:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

Si la lagrangiana es de la forma $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)$, la ecuación anterior es:

$$m \ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$$

que como cabía esperar es la ecuación de Newton.

Ecuaciones de Hamilton.

La lagrangiana depende de x, $\dot{x}$ y t, sin embargo, en muchas ocasiones conviene que $\dot{x}$ sea una variable independiente. Para ello, definimos la nueva variable $p = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$ y realizamos una transformada de Legendre, utilizando la función hamiltoniana definida como $\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L}$. Podemos comprobar que $\mathcal{H}$ es una función de x, p, y t escribiendo su diferencial:

$$d\mathcal{H} = \dot{x}dp + pd\dot{x} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}dx - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}d\dot{x} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt$$

debido a la definición de p la ecuación anterior queda:

$$d\mathcal{H} = \dot{x}dp - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}dx - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt$$

de modo que efectivamente las variables de $\mathcal{H}$ son x, p, y t. La ecuación anterior se puede modificar de la siguiente forma haciendo uso de la ecuación de Lagrange:

$$d\mathcal{H} = \dot{x}dp - \dot{p}dx - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}dt$$

Lo que nos permite encontrar directamente las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \end{aligned}$$

Las variables x y p se dice que son canónicas. Por último, utilizando las ecuaciones de Hamilton se encuentra que:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\dot{p}\dot{x} + \dot{x}\dot{p} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

Podemos deducir ya las siguientes leyes de conservación. Si la hamiltoniana no depende explícitamente de x entonces p es una constante de movimiento. Del mismo modo, si la hamiltoniana no depende explícitamente de t entonces la propia hamiltoniana es una constante de movimiento y se puede comprobar que además coincide con la energía de la partícula.

Corchetes de Poisson.

A continuación vamos a calcular la variación temporal de una función dinámica $f(x,p,t)$. La derivada respecto del tiempo será:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

utilizando las ecuaciones de Hamilton la ecuación anterior se puede escribir de la forma:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Si definimos el corchete de Poisson de dos funciones a y b de la siguiente forma: $\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial p} - \frac{\partial a}{\partial p}\frac{\partial b}{\partial x}$, la ecuación anterior se escribe de forma más sencilla como:

$$\frac{df}{dt} = \{f,\mathcal{H}\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

El corchete de Poisson también se puede utilizar para escribir de forma simplificada las ecuaciones de Hamilton. Dado que las propias variables x y p son funciones dinámicas y como además no dependen explícitamente del tiempo, las ecuaciones de Hamilton se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{x,\mathcal{H}\} \\ \dot{p} &= \{p,\mathcal{H}\} \end{aligned}$$

Se puede comprobar que el corchete de Poisson verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} &\{u,v\} = -\{v,u\} \\ &\{u+v,w\} = \{u,w\} + \{v,w\} \\ &\{uv,w\} = u\{v,w\} + \{u,w\}v \\ &\{u,\{v,w\}\} + \{v,\{w,u\}\} + \{w,\{u,v\}\} = 0 \end{aligned}$$

Las variables canónicas x y p verifican que $\{x,p\} = 1$. El corchete de Poisson permite además especificar las condiciones que debe verificar una variable dinámica para ser una constante de movimiento. Si una variable dinámica no depende explícitamente del tiempo y además su corchete de Poisson con la hamiltoniana es nulo, entonces es una constante de movimiento.

Transformaciones canónicas.

Para resolver un problema concreto se pueden utilizar distintas variables, es decir, que en vez de utilizar las variables x y p podíamos haber utilizado otras X y P, que estuvieran relacionadas con las anteriores mediante ciertas ecuaciones de transformación:

$$\begin{aligned} X &= X(x,p) \\ P &= P(x,p) \end{aligned}$$

Estas nuevas variables X y P serán variables canónicas si existe una cierta función $\mathcal{K}(X, P, t)$ de modo que se verifiquen unas nuevas ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} \\ \dot{P} &= -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial X} \end{aligned}$$

Las variables x y p verifican el principio de Hamilton (de mínima acción) de donde partimos al principio, es decir:

$$\delta \int_0^T (p\dot{x} - \mathcal{H}(x, p, t)) = 0$$

Del mismo modo, las nuevas variables X y P verificarán el siguiente principio de Hamilton:

$$\delta \int_0^T \left(P\dot{X} - \mathcal{K}(X, P, t)\right) = 0$$

Si se verifican las dos igualdades simultáneamente los dos integrandos estarán relacionados de la siguiente forma:

$$\lambda\,(p\dot{x} - \mathcal{H}(x, p, t)) = \left(P\dot{X} - \mathcal{K}(X, P, t)\right) + \frac{dF}{dt}$$

donde λ es una constante y F una función arbitraria de las coordenadas y del tiempo. Nos vamos a limitar a estudiar las transformaciones en las que $\lambda = 1$. La función F, como veremos a continuación, determina la transformación entre las antiguas coordenadas y las nuevas si depende en parte de las coordenadas antiguas y en parte de las nuevas, por lo que se denomina función generatriz de la transformación.

Vamos a considerar como primer ejemplo el caso en que la función F depende de x y X y del tiempo, es decir, que $F = F_1(x, X, t)$. En este caso, la relación entre la antigua hamiltoniana y la nueva será:

$$p\dot{x} - \mathcal{H} = P\dot{X} - \mathcal{K} + \frac{\partial F_1}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F_1}{\partial X}\dot{X} + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Como las antiguas coordenadas y las nuevas son independientes por separado, la ecuación anterior implica que:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ P &= -\frac{\partial F_1}{\partial X} \\ \mathcal{K} &= \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{aligned}$$

Las dos primeras ecuaciones determinan la transformación, es decir, que de estas dos ecuaciones podemos en principio despejar las coordenadas X y P y escribirlas en función de las coordenadas antiguas de la forma $X = X(x, p, t)$ y $P = P(x, p, t)$. Por otro lado, la última ecuación nos indica cómo se transforma la hamiltoniana al cambiar de coordenadas.

Vamos a ver ahora cómo podemos utilizar una función generatriz que dependa de la coordenada antigua y del momento nuevo, es decir, de la forma $F = F_2(x, P, t)$. Lógicamente si introducimos esta función en la relación que existe entre las hamiltonianas no llegamos a nada. El truco consiste en partir de una función del tipo F_1, de la siguiente forma. Escogemos la función:

$$F_1(x, X, t) = F_2(x, P, t) - XP$$

Si diferenciamos F_2 así definida, nos daremos cuenta que efectivamente sus variables son x, P y t:

$$dF_2 = \frac{\partial F_1}{\partial x}dx + \frac{\partial F_1}{\partial X}dX + \frac{\partial F_1}{\partial t}dt + PdX + XdP$$

Si tenemos en cuenta las relaciones que verifican las derivadas de F_1:

$$dF_2 = pdx - PdX + PdX + XdP + \frac{\partial F_1}{\partial t} = pdx + XdP + \frac{\partial F_1}{\partial t}dt$$

de modo que efectivamente las variables de F_2 son x, P y t. Además la ecuación anterior nos permite obtener el momento p y la coordenada X en función de las derivadas parciales de F_2, ya que:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_2}{\partial x} \\ X &= \frac{\partial F_2}{\partial P} \end{aligned}$$

Como $\dfrac{\partial F_2}{\partial t} = \dfrac{\partial F_1}{\partial t}$, la relación entre la nueva hamiltoniana y la antigua será:

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Del mismo modo se pueden utilizar otros tipos de funciones generatrices para especificar la transformación.

Ecuación de Hamilton-Jacobi.

Si mediante una transformación canónica consiguiéramos que la nueva hamiltoniana fuera nula el problema dinámico estaría resuelto, ya que las nuevas coordenadas y momentos serían constantes de movimiento. Vamos a ver que siempre podemos realizar una transformación canónica de este tipo. Vamos a suponer que la transformación que buscamos es del segundo tipo y vamos a denotar a la función generatriz por $S = S(x, P, t)$. Entonces se verificará la relación:

$$p = \frac{\partial S}{\partial x}$$

Como la nueva hamiltoniana es nula la función generatriz de la transformación debe verificar la siguiente ecuación:

$$\mathcal{H}(x, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

o bien:

$$\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

de modo que la función generatriz que buscamos es la solución de esta ecuación en derivadas parciales. Esta ecuación se conoce como la ecuación de Hamilton-Jacobi. Por ejemplo, para una partícula cuya hamiltoniana sea:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

la ecuación de Hamilton-Jacobi será:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

La función S se denomina la función principal de Hamilton y salvo una constante aditiva coincide con la integral de acción. En el caso en que la hamiltoniana no dependa explícitamente del tiempo, podemos separar la variable temporal escribiendo la función S de la siguiente forma:

$$S(x, P, t) = W(x, P) - Et$$

donde E es una constante que coincide con el valor de la hamiltoniana, según se deduce de las ecuaciones anteriores. La función W, que se denomina función característica de Hamilton, verifica la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\mathcal{H}\left(x, \frac{\partial W}{\partial x}\right) = E$$

Por ejemplo, para una partícula libre la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 = E$$

de modo que

$$W = \sqrt{2mE}x$$

(salvo una constante aditiva que la hemos escogido como nula). Por otro lado, de las ecuaciones de transformación

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{2mE}$$

Por último, la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi se puede escribir como:

$$S = px - Et$$